Liceul Tehnologic Economic de Turism Iaşi

Concursul Judeţean de Ştiinţe aplicate

pentru **clasele VIII-X**

Ediţia a VIII -a

25 martie 2017

Clasa a VIII-a

Barem de corectare

Subiectul I

Itemul	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
Răspunsul corect	d	d	c	b	b	b	b	a	a	b
punctaj	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5

Subiectul II

1.

a)(5p) a) $f(0)=\sqrt{5} \Rightarrow G_f \cap Oy=\{(0,\sqrt{5})\}$

$$f(x)=0 \Leftrightarrow (2-\sqrt{5})x+\sqrt{5}=0 \Leftrightarrow x=-\frac{\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}} \Leftrightarrow x=2\sqrt{5}-5 \Rightarrow G_f \cap Ox=\{(2\sqrt{5}-5;0)\}$$

b)(5p) $f(x)\le 2 \Leftrightarrow (2-\sqrt{5})x+\sqrt{5}\le 2 \Leftrightarrow (2-\sqrt{5})x \le 2-\sqrt{5} \Leftrightarrow x\ge 1 \Leftrightarrow x\in[1,+\infty)$

c)(5p) $$f\left(\frac{a+b)}{2}\right)=\frac{f(a)+f(b)}{2} \Leftrightarrow (2-\sqrt{5})\cdot\frac{a+b}{2}+\sqrt{5}=\frac{(2-\sqrt{5})a+\sqrt{5}+(2-\sqrt{5})b+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2-\sqrt{5})(a+b)}{2}=\frac{(2-\sqrt{5})(a+b)+2\sqrt{5}}{2}$$ evident adevărat pentru orice a și b reale.

d)(5p) $$f(-a)=-a-2b+b\sqrt{5} \Leftrightarrow -a\cdot(2-\sqrt{5})+\sqrt{5}=-a-2b+b\sqrt{5} \Leftrightarrow a\sqrt{5}+\sqrt{5}-b\sqrt{5}=2a-a-2b \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (a-b+1)\sqrt{5}=a-2b.$ Cum a și b sunt raționale obținem $a-b+1, a-2b\in\mathbf{Q}$ de unde

$$\begin{cases} a-b+1=0 \\ a-2b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2b \\ 2b-b+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2b \\ b=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\frac{1}{2} \\ b=-1 \end{cases}$$

2.

a)(5p) $(AB, BC, CC') \approx (12,4,3) \Rightarrow \exists k \in \mathbf{R}_{+}^{*}$ astfel incat $AB = 12k, BC = 4k, CC' = 3k.$ (1)

N prim, minim, de două cifre distincte $\Rightarrow N = 13 \Rightarrow AC' = 26dm$.(2)

Din (1) și (2) obținem $26^2 = (12k)^2 + (4k)^2 + (3k)^2 \Rightarrow k = 2$. (3)

Astfel, din (1) și (3) obținem $AB = 24dm, BC = 8dm, CC' = 6dm$

b)(10p) Observăm $(BA'C') \cap (DA'C') = A'C'$. (4)

$BB' \perp (A'B'C')$. Construim $B'Q \perp A'C' \overset{T3\perp}{\Rightarrow} BQ \perp A'C', BQ \subset (BA'C')$. (5)

$DD' \perp (A'B'C')$. Construim $D'P \perp A'C' \overset{T3\perp}{\Rightarrow} DP \perp A'C', DP \subset (DA'C')$. (6)

Construim $d \,//\, AC, B \in d$ și fie $R \in d$ astfel încât $BR = QP$, de unde BQPR paralelogram, și astfel $BQ \,//\, RP \overset{(5)}{\Rightarrow} RP \perp A'C', RP \subset (BA'C')$. (7)

Din (4), (6) și (7) obținem $m\left(\angle((BA'C'),(DA'C'))\right) = m(\angle(RP, DP))$. (8)

Din

$$\Delta DD'P \equiv \Delta BB'Q \Rightarrow BQ = RP = DP = \sqrt{DD'^2 + D'P^2} = \sqrt{DD'^2 + \frac{A'D'^2 \cdot D'C'^2}{A'D'^2 + D'C'^2}} =$$

$$= \sqrt{6^2 + \frac{8^2 \cdot 24^2}{8^2 + 24^2}} = \sqrt{6^2 + \frac{8^2 \cdot 24^2}{8^2(1+3^2)}} = \sqrt{6^2\left(1 + \frac{4^2}{10}\right)} = 6\sqrt{\frac{26}{10}} = \frac{6\sqrt{65}}{5} \text{ și}$$

$$D'P = \frac{12\sqrt{10}}{5}.$$

Astfel, ΔPDR isoscel de bază $DR = \frac{24\sqrt{10}}{5}$ și $DP = PR = \frac{6\sqrt{65}}{5}$, de înălțime $PP' = DD' = 6$ și, calculând aria în două moduri, obținem

$$\frac{DR \cdot PP'}{2} = \frac{PD^2 \sin\left(\angle(DP, PR)\right)}{2} \overset{(8)}{\Rightarrow} \sin\left(\angle((BA'C'),(DA'C'))\right) = \frac{4\sqrt{10}}{13}$$

c)(5p)

a) $V_{apa} = \frac{5}{6} \cdot V_{ABCDA'B'C'D'} = \frac{5}{6} \cdot 24dm \cdot 8dm \cdot 6dm = 960dm^3$, deci paralelipipedul de apă poate fi partiționat în 960 cuburi cu muchia de $1dm$, cu diagonala de $\sqrt{3}dm$. Răsturnatul lui N este 31, deci în cub se află $31^2 = 961$ peștișori, cu unul îm plus față de numărul de cuburi menționat și astfel, în baza principiului lui Diriclet (principiul cutiei), există permanent un cub (nu neapărat același) ce găzduiește măcar doi pești, ce se vor afla la o distanță între ei mai mică, cei mult egală cu diagonala cubului.